56. Die Determinanten werden wie in der Vorlesung berechnet. Man erhält $\det(A) = -12$, $\det(B) = -5$.

57. Wir berechnen die Untersummen zur Unterteilung
$1 < a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{2}{n}} < \dots < a^{\frac{k-1}{n}} < a$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}\right) \log\left(a^{\frac{k}{n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}\right) \log(a) \frac{k}{n} =$$

$$= \log(a) \left(\sum_{k=0}^{n-2} a^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k}{n} - \frac{k+1}{n}\right) + a \frac{n-1}{n} \right) =$$

$$= \log(a) \left(a - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k+1}{n}} \right) = \log(a) \left(a - \frac{a-1}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)} \right)$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 0} = (a^x)'(1) = \log(a)$

erhalten wir als Grenzwert der Untersummen für $n \to \infty$:

$$\int_1^a \log(x)\, dx = \log(a) \left(a - \frac{a-1}{\log(a)} \right) = a \log(a) - a + 1.$$

58. (a) $\quad u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$,

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1,$$

$$1+u^2 = 1 + \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$1-u^2 = 1 - \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$\frac{2u}{1+u^2} = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x),$$

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \cos(x).$$

(b) Wir substituieren $x = 2\arctan(u)$.

Für $0 < a < b < \pi$ ist

$$\int_a^b \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{\sin(2\arctan(u))}\,(2\arctan(u)')\,du =$$

$$= \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1+u^2}{2u}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{u}\,du = \log(\tan(x))\Big|_a^b.$$

Genauso ist für $-\pi < a < b < 0$

$$\int_a^b \frac{1}{\sin(x)}\,dx = -\log(-\tan(x))\Big|_a^b$$

Durch Ableiten sieht man, dass

$$F(x) = \begin{cases} \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) & \text{für } x>0,\ x \neq (2k+1)\pi \text{ für alle } k\in\mathbb{Z}, \\ -\log\left(-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) & \text{für } x<0,\ x\neq \text{—"—}, \end{cases}$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sin(x)}$ ist, z.B. $\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' =$

$$= \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin(x)} \quad \text{für } x>0 \text{ im Def.ber.}$$

Für $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$ ist

$$\int_a^b \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{\cos(2\arctan(u))} (2\arctan(u)') \, du =$$

$$= \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2}{1+u^2}\, du = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{1-u^2}\, du = \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{2(1-u)}\, du + \int_{\tan(\frac{a}{2})}^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{2(1+u)}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \log(1 - \tan(\tfrac{x}{2}))\Big|_a^b - \frac{1}{2}\log(1 + \tan(\tfrac{x}{2}))\Big|_a^b .$$

Durch Ableiten sieht man, dass $F(x) = \frac{1}{2}\log(1-\tan(\frac{x}{2})) - \frac{1}{2}\log(1+\tan(\frac{x}{2}))$ für $x \neq (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ~~F(x)~~ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cos(x)}$ ist.

59 (a) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$,

$f'(x) = 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2x e^{-x^2}(1-x^2)$.

Wegen $f(0)=0$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ nimmt f in 0 ein globales Minimum an.

Wenn f in x ein lokales Min. oder Max. annimt, dann ist $f'(x)=0$, also $x \in \{0, -1, 1\}$.

Wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (0,1)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (1,2)$ folgt aus dem Mittelwertsatz, dass f in 1 (und genauso in -1) ein lokales Maximum annimmt.

(b) $f(x) = \frac{1}{x^5(e^x-1)}$, $f'(x) = -\frac{5x^4(e^x-1)+x^5(e^x-1)}{x^{10}(e^x-1)^2} = -\frac{5+x}{x^6(e^x-1)}$.

f' hat in $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ keine Nullstellen, also hat f keine lokalen Minima und Maxima.

(c) $f(x) = \arctan(2\cos(x)) - x$,

$f'(x) = \frac{1}{1+4\cos(x)^2}(-2\sin(x)) - 1 = -\frac{2\sin(x)}{5-4\sin(x)^2} - 1$,

also $f'(x) = 0 \iff -2\sin(x) = 5 - 4\sin(x)^2 \iff 4\sin(x)^2 - 2\sin(x) - 5 = 0$

und $f'(x) > 0 \iff 4\sin(x)^2 - 2\sin(x) - 5 < 0$.

Die Lösungen von $4y^2 - 2y - 5 = 0$ sind $y = \frac{1 \pm 4\sqrt{21}}{4}$, also ist $4y^2 - 2y - 5 = \left(y - \frac{1+4\sqrt{21}}{4}\right)\left(y - \frac{1-4\sqrt{21}}{4}\right)$ und $\frac{1+4\sqrt{21}}{4} > 1$, $-1 < \frac{1-4\sqrt{21}}{4} < 0$. Also $f'(x) > 0 \iff \sin(x) < \frac{1-4\sqrt{21}}{4}$.

Die Nullstellen von f' sind damit $x_k := \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{21}}{4}\right) + 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $y_k := (2k+1)\pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{21}}{4}\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Aus den Vorzeichen von $f'(x)$ folgt (mit Hilfe des MWS), dass f in jeden x_k ein lokales Maximum und in jedem y_k ein lokales Minimum annimmt.

Lösungen zu den Aufgaben 60 und 61 können Sie in Lehrbüchern zu Analysis finden, zum Beispiel in Königsberger: Analysis S. 182-4, S. 264-6.